Einfache Funktionen I

Funktion f

$$\boxed{f: D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)}$$

(„Abbildung von x aus D auf y in $\mathbb{R}$")

x: Variable / Argument

y: Funktionswert / Bild

(M, N nichtleere Mengen)

Abbildung $\boxed{f: M \to N}$

Vorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet

$\boxed{f(M)}$: Bild von f

identische Abb. / Identität

Für $\boxed{f: D \to Z}$:

$\boxed{Z}$: Zielbereich

$\boxed{D / D_f}$: Definitionsbereich

$\boxed{W_f := \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq Z}$: Wertemenge / Bildmenge

bzw. $\boxed{f(D)}$ „Bild von D unter f"

Abszisse: x-Achse

Ordinate: y-Achse

(Funktions) Graph von $\boxed{f: D \to \mathbb{R}}$:

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Graph}(f) &:= \{(x;y) \mid x \in D, y = f(x)\} \\ &= \{(x;y) \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^2\end{aligned}}$$

lineare Funktion:

$$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{wo } f(x) = mx + b}$$

mit Geradengleichung $\boxed{g: y = mx + b,\ x \in \mathbb{R}}$

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Nullstelle von $\boxed{f: D_f \to \mathbb{R}}$:

$$\boxed{\text{Stellen } x \in D_f,\ \text{wo } f(x) = 0}$$

für lineare Funktionen: $\boxed{x = -\frac{b}{m}}$

BRUNNEN

Abbildungen und Funktionen I

sei $f: M \to N$

injektiv: $\forall x, y \in M: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

("immer 1-zu-1 Zuordnungen") $g \circ f = id_M$ $\Rightarrow$ $\#M \leq \#N$

("zum n gehört nur ein m") (höchstens)

surjektiv: $\forall y \in N \; \exists x \in M: f(x) = y$

("zu jedem n gehört mindestens ein m") $\Rightarrow$ $\#M \geq \#N$

$f \circ g = id_N$

Bijektiv: injektiv und surjektiv $\rightarrow$ $\#M = \#N$

auf endlichen Mengen

Urbild von y:

$y \in N: f^{-1}(y) = \{x \in M \mid f(x) = y\}$

(wenn $y \notin f(M)$, dann $f^{-1}(y) = \emptyset$)

sowas wie, aber keine Umkehrfunktion!

Betragsfunktion

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Komposition

für $f: M \to N$ u. $g: N \to P$

$$g \circ f : M \to P, \quad x \mapsto g(f(x))$$

Bsp.

$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto x^2$

$g_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto x + 3$

$g_3 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$

$g_3 \circ g_2 \circ g_1 : x \xmapsto{g_1} x^2 \xmapsto{g_2} x^2 + 3 \xmapsto{g_3} \sqrt{x^2+3}$

Zielbereich der ersten muss im Definitionsbereich der zweiten liegen, damit die Verkettung wohldefiniert ist

Abbildungen u. Funktionen II

Umkehrabbildung

$f: M \to N, \; x \to f(x)$

Inverse

$g: N \to M, \; y \to f^{-1}(y)$

$g \circ f = id_M$ u. $f \circ g = id_N$

nur wenn f bijektiv!

g ist Linksinverse zu f

↓

f injektiv

g ist Rechtsinverse zu f

↓

f surjektiv